

La enseñanza de los Números en Básica y Media: Análisis de praxeologías matemáticas y didácticas

Daniel Santander, Joaquim Barbé, Lorena Espinoza, Eduardo Donoso

Universidad de Santiago de Chile.

1. Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal mostrar los resultados obtenidos al comparar cómo son estudiadas un conjunto de *Organizaciones Matemáticas* (OM) en torno a los números a lo largo del Octavo año de Educación Básica y el Primer año de Educación Media.

Esta investigación nace de la necesidad de contrastar las propuestas hechas por los planes y programas de estudio oficiales del ministerio de educación, las propuestas hechas por los libros de texto y las llevadas a cabo por profesores y alumnos, referente a las mismas OM y analizar las semejanzas y diferencias entre las distintas propuestas. El análisis de dichas OM se llevará a cabo principalmente en dos etapas fundamentales, correspondientes a la dimensión curricular y dimensión fáctica.

En una primera etapa se realizará un análisis de los planes y programas de estudio [1,2] y los libros de texto oficiales entregados por el ministerio de educación [3,4], tanto en octavo año básico como en primer año medio en las unidades correspondientes a los sistemas de numeración. En esta primera etapa se busca encontrar los posibles quiebres y patrones comunes entre las OM propuestas por los programas y las OM propuestas por los textos.

Posteriormente, considerando los resultados obtenidos del análisis de los planes y programas y libros de texto, se realizará un análisis de la reconstrucción de dichas OM por parte de los profesores en los niveles antes mencionados.

En la segunda etapa se realiza un análisis de la dimensión fáctica. Se observan las OM propuestas por los profesores, comparándolas con las OM analizadas, y se describe la manera de cómo los profesores gestionan, y cómo los alumnos estudian, dichas OM. La descripción y análisis de cómo son estudiadas las OM se realiza utilizando la noción de *organización didáctica* (OD).

Finalmente, los resultados derivados de los distintos niveles de análisis son contrastados, con el propósito de determinar el conjunto de factores relativos a las OM y las OD analizadas que influyen en el quiebre entre ambos niveles educativos.

Para la realización de esta investigación utilizamos como marco teórico la *Teoría Antropológica de la Didáctica*[5] (TAD). Dicha teoría realiza una modelización del conocimiento matemático que se enseña dentro de un proceso de estudio mediante la noción de *praxiología matemática* (OM), así como también modeliza, mediante la *Teoría de los Momentos Didácticos*, la actividad que realiza el profesor y los alumnos, para estudiar dicho conocimiento (OD).

2. Metodología

En este apartado describimos la metodología utilizada para analizar y establecer comparaciones entre los distintos procesos de estudio observados en torno a números, tanto en Octavo año Básico, así como en Primer año Medio.

En la primera etapa se analizan las OM propuestas en los planes y programas dentro de las unidades de números. Para realizar dicho análisis se utiliza la noción de *praxiología* [5], identificando dentro de la unidad las principales tareas que aparecen, las técnicas sugeridas para resolverlas y la tecnología y teoría utilizadas para justificar las distintas técnicas. Los resultados de dicho análisis son estructurados mediante un *mapa de tareas* [6], en el que se encuentran dibujadas simbólicamente las distintas tareas. Cada tarea es simbolizada mediante un rectángulo, cuya área es proporcional a la importancia que posee dicha tarea dentro de la OM. La interrelación que pueda haber entre dos tareas determinadas se denota en el *mapa de tareas* mediante una intersección de los rectángulos que las representan. Esta representación facilita una visión completa de las distintas tareas que aparecen en la OM, la secuencia en que estas aparecen en el programa, el grado de importancia que el programa les otorga a cada una de ellas y cómo se articulan entre ellas. A partir de dicho análisis se establece el grado de completitud, articulación y coherencia de la OM propuesta. El grado de completitud se determina analizando si en la OM propuesta aparecen los cuatro ingredientes que conforman una *praxiología* (tareas, técnicas, tecnología y teoría). En segundo lugar, el grado de articulación se mide a partir de cómo las distintas tareas de la OM están interrelacionadas entre ellas y cómo la OM considerada se articula con otras OM estudiadas previamente. Finalmente, el grado de coherencia se establece determinando si efectivamente la relación entre los distintos ingredientes presentes en la OM es consistente o no, es decir si efectivamente las tareas planteadas se resuelven utilizando las técnicas propuestas, y a su vez dichas tareas y técnicas son acordes a la tecnología presentada.

En la segunda etapa se analizan las OM propuestas en los libros de texto, para las unidades de números de 8º Básico y 1º medio. Por un lado se analizan los libros de texto oficiales, entregados por el ministerio de educación, correspondientes a ambos niveles, y por otro lado, los textos escolares correspondientes a cada nivel más utilizados entre los profesores. Es decir, se analizan los tipos de tareas presentes en los textos, las técnicas propuestas para realizar dichas tareas y la tecnología y teoría utilizadas para justificar las técnicas. Una vez analizadas las OM propuestas en los textos, éstas son contrastadas con las propuestas en los planes y programas, en términos de sus ingredientes, con el fin de determinar las semejanzas y diferencias existentes entre las OM propuestas por los textos y las OM propuestas por los programas.

En esta etapa, se analiza también la estrategia didáctica (OD) utilizada por los autores de los libros de texto para reconstruir la OM propuesta en los planes y programas. Esta estrategia didáctica se analiza en términos de la *Teoría de los Momentos Didácticos*, los que permiten determinar el rol que juega cada actividad matemática dentro del proceso de estudio. Por ejemplo, cuál es la *actividad matemática* propuesta para empezar el estudio, cómo se vive el *momento exploratorio*, que parte de la OM estudiada se *institucionaliza*, cómo se *trabajan las técnicas* propuestas, etc.

En la tercera etapa (Dimensión Fáctica) se analiza cómo las OM son efectivamente reconstruidas dentro de las salas de clases por los alumnos y profesores. Para realizar este análisis, los procesos de estudio vividos son observados directamente y son filmados íntegramente. Además de la observación directa, se recoge material originado por los procesos de estudio observados; cuadernos de los alumnos, guías y pruebas confeccionadas por los profesores, etc. Por otro lado, se confeccionan dos entrevistas para el profesor, las que son aplicadas al inicio y al final del período de observación, y por último, se aplica un cuestionario para los alumnos.

El proceso vivido, se analiza utilizando un dispositivo llamado *Tablas OD*, tabla diseñada para tal propósito, en la que se reflejan tanto los ingredientes de la OM estudiados en términos de la noción de *praxiología matemática*, así como los episodios que son vividos en términos de la *Teoría de los Momentos Didácticos*. Este dispositivo es una síntesis de las *tablas tipo I y tipo II* propuestas por Barbé et al. Para estudiar el proceso de construcción de la OM de límites de funciones en la secundaria [7]. Las *Tablas OD* permiten sintetizar lo que se hace clase a clase, los roles del profesor y del alumno dentro del *proceso de estudio*, los *momentos didácticos* presentes, los elementos de la *praxiología* que aparecen y las *actividades matemáticas* que se realizan para la reconstrucción de la OM.

Los resultados obtenidos en ambos análisis son contrastados para establecer el grado de articulación entre las OM efectivamente estudiadas y las estrategias didácticas utilizadas, con el fin de encontrar patrones comunes entre los distintos procesos, así como también, detectar las diferencias y quiebres que se presentaron a lo largo de la unidad. Por otra parte, se buscan las relaciones que puedan existir entre la unidad de números en octavo básico y la correspondiente en primero medio, tanto en términos de las OM estudiadas, así como de las OD construidas a lo largo del estudio. Es decir, se analiza el grado de articulación que existe entre las OM de los procesos de 8° Básico y 1° medio observados y de que forma ha sido gestionado el estudio de estas OM.

Una vez finalizado el proceso de análisis de estas tres etapas y caracterizadas las OM estudiadas en Octavo año básico y en Primer año medio y las OD reconstruidas por los autores de los libros de texto y por el profesor en la sala de clases, éstas se comparan con el fin de establecer semejanzas y diferencias entre lo que se entiende por estudiar números en Octavo año básico y en Primer año medio, tanto en lo que se refiere a las OM estudiadas así como a las características de los procesos vividos para estudiarlas (OD).

3. Principales Resultados

Para llevar a cabo la investigación se seleccionaron la unidad de números con signo y números y potencias de los programas de 8° básico y 1° medio respectivamente y las mismas unidades de los textos oficiales y de dos textos escolares no oficiales pero ampliamente utilizados por los profesores. Una vez analizadas y caracterizadas las OM de los programas y de los textos estas fueron contrastadas obteniendo los siguientes resultados:

1. La cantidad de tareas matemáticas de la OM de Octavo año básico es mucho más reducida que la cantidad de tareas matemáticas que aparecen en la OM propuesta por el programa de primero medio.
2. En la OM de octavo aparecen claramente explicitadas las técnicas utilizadas y la tecnología que justifica dichas técnicas mientras que en la OM de primero medio hay muy poca explicitación de las técnicas y una gran ausencia de tecnología.
3. La concentración en el tipo de Tareas de la OM de octavo, así como la especificación de las técnicas y la tecnología necesaria, otorga a dicha OM un grado de coherencia significativo. Sin embargo, debido a la poca diversidad de tareas abordadas, la OM construida es puntual y por tanto la OM permanecerá muy aislada del resto de OM estudiadas dentro de ese mismo nivel.
4. La gran diversidad de Tareas que aparecen en la OM de Primer año medio tiene muchas tareas sin articular, con una gran diversidad de técnicas. Muy poca explicitación de tecnología y teoría.
5. En la OM de Octavo año básico se aprecia una clara desalgebrización intencionada al estudiar los conjuntos numéricos. El estudio se centra en desarrollar las técnicas para sumar, restar, multiplicar y dividir “números con signo”. Sin embargo, en un momento determinado se ven obligados a recurrir a técnicas algebraicas para poder justificar que el producto o el cociente de dos números negativos da como resultado un número positivo.
6. En Primer año medio la OM está construida con el fin de dar a conocer los conjuntos numéricos N , Z , Q , y R , pero no se trabaja con las propiedades de esos conjuntos salvo la operatoria, con lo que esa intención no se concreta. Es decir, los números son para calcular.

Como conclusión general podemos afirmar que la OM propuesta en el programa de octavo es muy poco ambiciosa pero coherente mientras que la OM de 1° es mucho más ambiciosa, pero muy poco articulada. Esta clara diferencia entre las propuestas de los dos programas de estudio se concreta en que las OM propuestas por los textos de 8° son prácticamente una copia de la OM propuesta por el programa, mientras que las OM propuestas en los textos de 1° son una reducción significativa de la OM propuesta en el programa, centrándose en este caso, en un enfoque mucho más tradicional que el explicitado en el programa de 1° medio.

Una vez analizadas y caracterizadas las OM de números de los programas y los textos escolares se seleccionaron un conjunto de 4 cursos, dos de 8° Básico y dos de 1° medio, para analizar cómo dentro de ellos era vivido el *proceso de estudio* de dichas OM tanto por los profesores como por los alumnos. Los análisis realizados sobre dichas observaciones nos permitieron caracterizar la *dimensión fáctica* de la problemática, concretando tanto las OM que efectivamente fueron reconstruidas en las aulas, así como las distintas estrategias didácticas (OD) utilizadas por los profesores y alumnos para estudiar esas OM.

A continuación mostramos los principales resultados obtenidos de dicho análisis:

1. En la OM reconstruida en Octavo año básico, se manifestó una clara desalgebrización, tal y como ya sucediera en los programas de estudio y los textos escolares. La OD reconstruida fue puntual, y sin articularla con otras OM estudiadas anteriormente. El principal objetivo del estudio fue desarrollar las reglas algebraicas de los signos para sumar, restar, multiplicar y dividir “números con signo”, sin embargo, la tecnología utilizada para justificar las técnicas no fue algebraica, sino que se basó en un discurso basado en las propiedades de la recta numérica.
2. En la OM de Primer año medio, existió inicialmente un intento de articulación algebraica de los distintos conjuntos numéricos, pero se este se desvaneció rápidamente para pasar a centrar el estudio en repasar la operatoria dentro de los distintos conjuntos numéricos, otorgando un especial énfasis a pasar de fracción a expresión decimal y viceversa. El proceso de estudio se vivió como una sucesión de OM puntuales, centradas en estudiar la operatoria dentro de cada conjunto numérico, fuera del contexto y desarticuladas entre ellas. propuesto por los planes y programas. Los naturales, los enteros, las fracciones, los decimales y los racionales fueron estudiados como distintas formas de números, sin estudiar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos hecho que imposibilitó que los alumnos pudieran establecer relaciones entre el conocimiento nuevo con el antiguo.
3. Los dos procesos observados fueron poco ambiciosos en términos de aprendizaje matemático, ninguno de ellos abordó la totalidad de la OM planteada en los Planes y Programas.
4. La OM de octavo reconstruida fue similar a la propuesta en el programa, mientras que la OM de 1° medio centró el estudio en pequeñas partes de la OM propuesta por el programa. Dicha selección, llevada a cabo por el profesor, tubo como consecuencia una gran desarticulación entre las partes de la OM construida.
5. En Primero Medio el estudio se centró en el *momento del trabajo de la técnica* sin justificar su utilización. No hubo espacio para proponer técnicas nuevas ni para preguntarse porqué funcionan éstas técnicas. Las técnicas fueron introducidas sin estudiar a qué tipos de problemas a que responden.
6. En ninguno de los procesos de estudio observados se vivió el *momento tecnológico teórico*, sin mostrar en ningún caso las condiciones necesarias y suficientes para determinados hechos matemáticos, sobre todo en lo referente a los conjuntos numéricos, su ampliación, sus propiedades y sus restricciones. Tanto las técnicas para resolver los problemas como la justificación de éstas fueron impuestas en su gran mayoría por el profesor mediante *momentos de institucionalización*.
7. Los cuestionarios realizados a los alumnos, una vez finalizada la unidad, nos permitieron verificar la hipótesis de que los alumnos en los procesos observados, el saber que vive en manos de los alumnos no va más allá de la imitación y por tanto se centra en el saber-hacer, sin apropiarse del conocimiento construido. Como consecuencia de ello, olvidaron rápidamente lo aprendido.
8. Finalmente, es de destacar que todos los profesores observados, pese a los diferentes estilos docentes, reconstruyeron OM puntuales y carentes de tecnología. Fueron los

profesores los que impusieron precozmente las técnicas a usar e indicaron como usarlas, otorgando una escasa responsabilidad a los alumnos en la reconstrucción de las OM. Es decir, los alumnos actuaron como meros espectadores, a los que su principal responsabilidad fue imitar correctamente los procedimientos impuestos por el profesor.

Conclusiones

La metodología utilizada para estos análisis nos permitió caracterizar muy bien las OM propuestas oficialmente, las reconstruidas y las OD propuestas por los profesores que hacen clases en estos cursos. A través del contraste de los mapas de tareas de las distintas etapas, nos pudimos dar cuenta de los tipos de tareas propuestas y de las que en realidad fueron llevadas a cabo, además de la secuencia utilizada por los profesores para estudiar la OM.

Pudimos comprobar la escasa articulación existente, por un lado entre las OM propuestas en los documentos oficiales y las OM reconstruidas en la sala de clases y por otro lado, entre las OM reconstruidas en octavo año básico y las OM reconstruidas en primero medio. Además, se pudo verificar la importancia que tiene el profesor en la construcción del conocimiento y que el aprendizaje de los alumnos depende mucho de la construcción que haga el profesor y cómo la haga. Es poco o casi nada lo que el alumno participa en la reconstrucción de las OM planteadas y esto lleva a que el aprendizaje no sea el esperado.

Agradecimientos

Agradecemos a CONICYT por financiar esta investigación mediante los proyectos FONDECYT 1020342 y 7020342.

Referencias bibliográficas

1. Ministerio de Educación, Programa de Estudio de Octavo año Básico, 2002.
2. Ministerio de Educación, Programa de Estudio de Primer año Medio, 1998.
3. Barrientos S., Dittborn M., Goldenberg M., 8° Básico, Ed. Arrayán, 2003.
4. Cid E., Muñoz M., 1° Medio, Ed. Arrayán, 2003.
5. Chevallard Y., L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265, 1999
6. Bosch M., Espinoza L., Gascón J., El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de praxiologías docentes espontáneas. *Recherches en Didactique*
7. Barbé J., Bosch M., Gascón J., Didactic Restrictions on the teaching of limits of functions at secondary school, *Educational Studies in Mathematics*, 2004 (aceptado). *des Mathématiques*, 23(1), p 79-136, 2003.